PODVARIETY A TEČNÉ DISTRIBUCE

* distribuce ≡ rozložení vektorových podprostorů

PODVARIETA

* varieta menší dim. uvnitř variety větší dim. jejichž struktury jsou kompatibilní

Def: $\iota : \tilde{N} \to M$ * vnoření

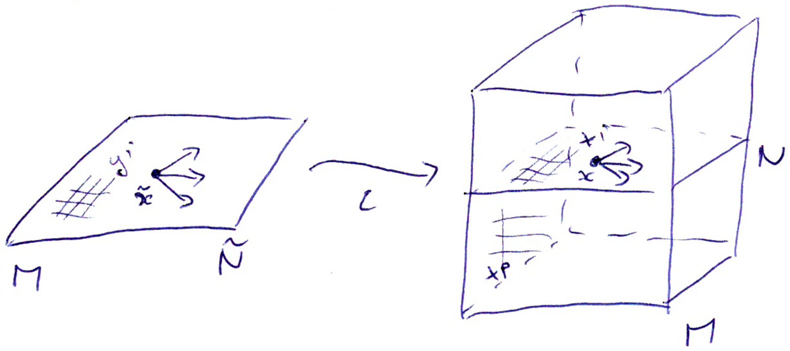
dim: $n \le m$

$N = \iota \tilde{N} \subset M$

* N je obraz $\tilde{N}$, což je podvarieta v M
* odlišujeme N a $\tilde{N}$, při obecné struktura N může být degenerovaná
* navíc požadujeme:

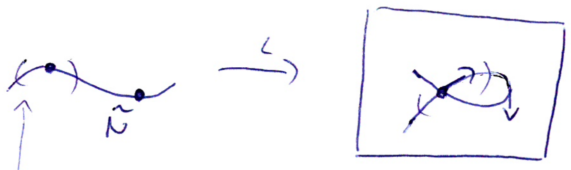
ι je "lokálně prosté" v $x \in \tilde{N}$ * směry se nedegenerují, tzn. indukované zobr. je prosté

$\equiv \iota_*|_x$ je prosté



Def: ι vnoření (immersion) ≡ lok. prosté

ι vložení (embedding) ≡ ι je navíc prosté



* je vnoření (tečné vekt. nedeg.)
* není vložení (protíná se)
* identifikované body rozlišíme odlišením $\tilde{N}$ a N

* pro lokální vlastnosti není důležité, vnoření na malé oblasti je vložení, můžeme identifikovat $\tilde{N} \simeq N$

přizpůsobené souřadnice

* na oblasti kde je ι prosté

$\tilde{N}$ y^i $i = 1, \dots, n$

M x^a $a = 1, \dots, m$

$x^p = \text{konst.}$ $p = n+1 \dots m$

* podvarieta N je vybraná fixováním $x^p = \text{konst.}$ (vybírají podvarietu)

$x^i = y^i$ $i = 1 \dots n$

* souřadnice x^i leží v N (tzn. odpovídají y^i ležící v $\tilde{N}$)
* viz obrázek výše

TEČNÉ VEKTORY A NORMÁLOVÉ KOVEKTORY

* "tečné" a "normálové" se myslí vzhledem k podvarietě N
* vektory z tečného prostoru $\tilde N$ můžu pomocí push-fw. přenést na vektory z tečného prostoru M, tvoří v ní podprostor (≡ tečné k N)

tečné vektory k N

$$\iota_*: T_{\tilde x}\tilde N \to T_x N \subset T_x M$$

* podprostor tečných vektorů k N

tzn. $T_xN \simeq T_{\tilde x}\tilde N$ ve smyslu $\tilde N \simeq N$

* zobr. ι není difeo (různé dim.), tzn. nemám postfw. pro kovektory
* $T^*_xN \not\subset T^*_xM$ protože $\alpha \in T^*_xN$ neumí působit na netečné vekt. k N

pozn: nelze položit ~~rovno~~ 0 protože nemám rozštěpení na tečné a normálové vektory, to lze až pomocí metriky, kterou neuvažujeme (bude v GM2, možná koncem GM1)

* máme pull-back, který umožňuje omezit působení kovektoru jen na tečné k N

restrikce kovektoru (* lze i pro p-formu)

$$\iota^*: T^*_xM \to T^*_{\tilde x}\tilde N$$

$$\omega|_N = \iota^*\omega$$

* působí na vektorech tečných k N jako původní kovektor

* lze definovat kovekt. normálové k N, tj. formy s nulovou restrikcí, je triviální na tečných vekt.

normálové kovektory k N

$$\omega \in N^*_xN \subset T^*_xM$$

$$\omega|_N = 0$$

* podprostor normálových kov. k N (žijí v kot. pr. M) (netýká se pouze N, ale celé variety M)

* normálové kovektory jsou komplementární k tečným vektorům:

dualita T_xN a N^*_xN

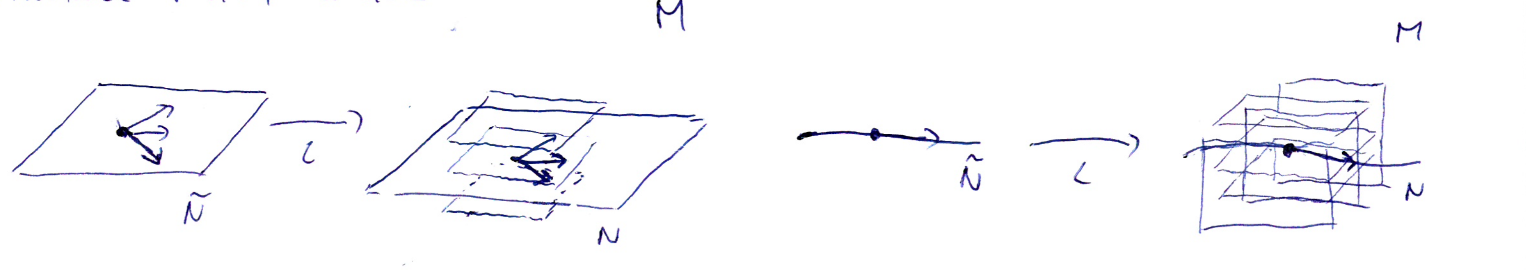
$$\omega \in N^*_xN \iff \forall a \in T_xN \quad \omega \cdot a = 0$$

* normálový kovektor anihiluje všechny tečné vektory

$$a \in T_xN \iff \forall \omega \in N^*_xN \quad \omega \cdot a = 0$$

* tečný vektor anihiluje všechny normálové kovekt.

* ilustrace v n=1 a n=2



* normálové kovektory znázorňují jako systém plošek lokálně rovnoběžných s N

* vyjádření v přizpůsobených souř. (budeme rozlišovat N a $\tilde N$)

teč. vekt.

$\tilde a \in T\tilde N$ $\quad \tilde a = a^i \frac{\partial}{\partial y^i}$

$a = \iota_* \tilde a \in TN$ $\quad a = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

* chybí $\frac{\partial}{\partial x^p}$, $p = n+1, \dots, m$, pže nejsou tečné k N

tzn. pouze komponenty k souřadnicím ležícím v N

restr. kov.

$\omega \in T^*M$ $\quad \omega = \omega_a dx^a$

$\tilde\omega = \omega|_N \in T^*\tilde N$ $\quad \tilde\omega = \omega_i dy^i$

* odpovídá dx^i, $i = 1, \dots, n$, které aktivně působí na tečné vektory (ty, co je anihilují nepotřebuji)

norm. kovekt.

$\omega \in N^*N$ $\quad \omega = \sum_{p=n+1}^{m} \omega_p dx^p$

* obsahuje pouze dx^p, $p = n+1, \dots, m$, pže jejich zapůsobení na tečné dá nulu

tzn. pouze komponenty k souř. vybírajícím N

důk: $\iota_* \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\iota^* dx^p = 0$ |

* otázka: kdy lze zadané rozložení vektorů chápat jako tečné vektory k nějaké podvarietě? ≡ integrobilita (jak zrekonstruovat podvarietu?)

TEČNÉ A NORMÁLOVÉ DISTRIBUCE

Def: Δ je distribuce (podprostorů teč. vekt. dim. n):

- soubor podpr. $\Delta_x \subset T_x M$ $\forall x \in M$, $\dim \Delta_x = n$
- generovány hladkými poli $a_j \in TM$, $j = 1, \dots, n$

  tj. $\forall x \in M$, Δ_x je generováno vektory $a_j|_x$

* podprostory se bod od bodu mění hladce (řeknu pomocí hladké báze)

říkáme: $a \in TM$ patří do Δ když $\forall x$ $a|_x \in \Delta_x$

* bude nás zajímat kdy lze chápat jako tečné k podvarietám (zatím ne)

Def: Δ^* je kodistribuce (podprostorů teč. kovekt. dim $m-n$) * kodim. n

- soubor podpr. $\Delta^*_x \subset T^*_x M$ $\forall x \in M$, $\dim \Delta^*_x = m-n$
- generovány hladkými poli $\alpha^p \in T^*M$, $p = n+1, \dots, m$

  tj. $\forall x \in M$, Δ^*_x je generováno kovektory $\alpha^p|_x$

říkáme: $\alpha \in T^*M$ patří do Δ^* když $\forall x$ $\alpha|_x \in \Delta^*_x$

* podobně: bude nás zajímat kdy jsou normálové k podvarietám.

pozn: stačí nám hl. pole a_j a α^p definované pouze na oblastech U_x, které pokrývají M (tzn. jde nám jen o hladkost, nepotřebujeme jednu globální bázi)

Def: Δ a Δ^* jsou komplementární pokud

$\dim \Delta = \operatorname{kodim} \Delta^* = n$

$\forall a \in \Delta_x, \forall \alpha \in \Delta^*_x$, $\alpha \cdot a = 0$ $\quad$ (* motivováno komplementaritou teč. vekt. a norm. kovekt)

* tzn. distribuce definuje komplementární kodistribuci a opačně

$a \in \Delta \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta^*$ $\alpha \cdot a = 0$

$\alpha \in \Delta^* \Leftrightarrow \forall a \in \Delta$ $\alpha \cdot a = 0$

* odteď budeme pracovat s komplementárními Δ a Δ^* (stačí zadat jedno)

Def: restrikce formy $\omega \in T_k^0 M$ (nulová)   * tj. $\omega_{n_1 \dots n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k} = 0$

$$\omega|_\Delta = 0 \iff \forall a_1, \dots, a_k \in \Delta, \quad \omega(a_1, \dots, a_k) = 0$$

* restrikce je nula když kontrakce s vektory distribuce je nula

pozn: $\alpha \in \Delta^* \iff \alpha|_\Delta = 0$ (* tady α 1-forma)

Def: Δ je involutivní

- $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$
- $\forall a, b \in \Delta \quad [a,b] \in \Delta$ * přesněji pro pole patřící do Δ (ve smyslu výše)
- a_i generující Δ * explicitně pomocí generátorů

$$[a_i, a_j] = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{j} a_j$$

* fce na M (libovolné)

Def: Δ^* je diferenciální

- $\forall \alpha \in \Delta^* \quad d\alpha|_\Delta = 0$, Δ je kompl. k Δ^* (* $d\alpha$ aplikov. na prvky Δ musí být 0)
- α_p generují Δ^* * explicitně pomocí generátorů

$$\underbrace{d\alpha^p}_{\text{2-forma}} = \sum_{q=n+1}^{m} \Theta_q^p \wedge \alpha^q$$

* musí obsahovat α^p aby se vynulovalo po aplikaci na prvky Δ

* pole kovektorů na M (libovolné)

Věta: Δ, Δ^* kompl.

Δ je involutivní $\iff$ Δ^* je diferenciální

důk: $\forall p \quad d\alpha^p|_\Delta = 0$ tj. Δ^* je dif.

$$\iff \forall i,j,p \quad 0 = a_i \cdot d\alpha^p \cdot a_j = a_i \cdot d(\underbrace{a_j \cdot \alpha^p}_{=0}) - a_j \cdot d(\underbrace{a_i \cdot \alpha^p}_{=0}) - [a_i, a_j] \cdot \alpha^p$$

* je nula při působení na $\forall$ generátory Δ

* Cartanovy vzorce

* půs. gen. Δ na gen. kompl. Δ^* je nula

$\iff \forall i,j \quad [a_i, a_j] \in \Delta$ tj. Δ je invol.

* pže anihilován $\forall$ gen. Δ^*

* můžeme pracovat jak s Δ tak s Δ^*, pojmy "invol." a "dif." jsou si komplementární

* kdy Δ a Δ^* definujou podvariety? kdy je lze chápat jako teč. vekt. a nor. kov.?

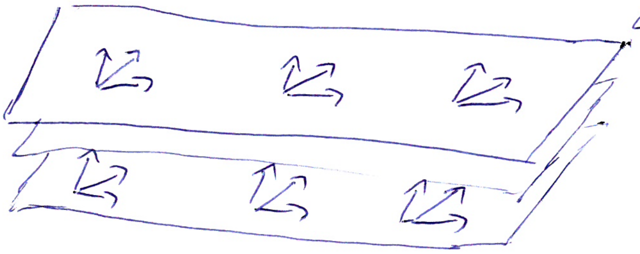
→ to je otázka integrability

Def: N je integrální podvarieta Δ, Δ^* pokud
$\forall x \in N$

$a \in \Delta_x \Leftrightarrow a \in T_x N$ tj. $\Delta_x = T_x N$ * distr. jsou tečné vekt.

$\alpha \in \Delta^*_x \Leftrightarrow \alpha \in N^*_x N$ tj. $\Delta^*_x = N^*_x N$ * kodistr. jsou norm. kovekt.

Def: Δ, Δ^* jsou integrabilní pokud
každým $x \in M$ prochází integrální podvarieta



* integr. podv. je taková, ke které jsou Δ tečné

* Δ je integrabilní, když ji lze chápat jako tečné vekt. k systému podvariet

* stále jen lokální pohled, nezkoumáme zda nejsou některé součástí jedné podvariety (to je pak otázka foliace)

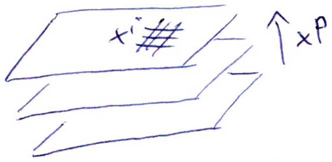
Věta: (* vyjádření v souř.)

Δ, Δ^* jsou integrab. $\Leftrightarrow$
$\exists$ souř. x^k takové, že

$\frac{\partial}{\partial x^i}$ $i = 1, \dots, n$ generují Δ_x

dx^p $p = n+1, \dots, m$ generují Δ^*_x

$x^p = \text{konst.}$, $p = n+1, \dots, m$ definuje integ. podv.
x^i, $i = 1, \dots, n$ jsou souř. na integ. podv.



* přizp. souř. pro systém podvariet

* celý systém podvariet má jedny přizpůsobené souřadnice
(tzn. přizpůsob. souř. každé podv. lze spojit dohromady tak, že x^p různým konstantám odpovídají různé podvariety)

* $\frac{\partial}{\partial x^i}$ generují teč. vekt. a dx^p generují norm. kovekt., integrabilita říká že generují zadané distribuce Δ a kodistribuce Δ^*

dk: plyne z $\exists$ přizp. souřadnic v okolí podvariety

Frobeniova věta:

Δ, Δ^* je integrabilní
$\Leftrightarrow$ Δ je involutivní
$\Leftrightarrow$ Δ^* je diferenciální

(* tuhle ekvivalenci víme)

* tzn. pokud Lie. z. gen. Δ patří do Δ, nebo vnější der. gen. Δ^* vyčíslená na Δ je nulová (neboli $d\alpha^p$ má tvar výše), tak Δ jsou tečné vekt. a Δ^* normálové kovekt. nějakých podvariet

důk: "$\Rightarrow$"

* předchozí věta

Δ, Δ^* integrab. $\Rightarrow \exists x^p, p = n+1, \dots m$, dx^p generuje Δ^*

$\Rightarrow \alpha^p$ gen. Δ^* lze napsat jako $\alpha^q = \sum_{p=n+1}^{m} A^q_p \, dx^p$, A^q_p nedeg.

* generátory Δ^*

$$\Rightarrow d\alpha^p = \sum_{q=n+1}^{m} dA^p_q \wedge dx^q = \sum_{r,q=n+1}^{m} dA^p_q \wedge A^{-1}{}^q_r \, \alpha^r = \sum_{r=n+1}^{m} \Theta^p_r \wedge \alpha^r, \text{ tzn. } \Delta^* \text{ je dif.}$$

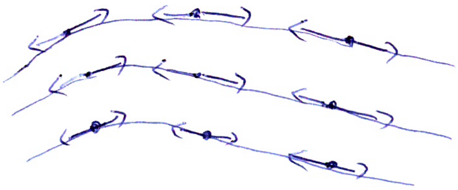
* protože A^q_p lze invertovat

$$\Theta^p_r = \sum_{q=n+1}^{m} A^{-1}{}^q_r \, dA^p_q$$

důk: "$\Leftarrow$" dělá se indukcí (možná později)

Př: $n = 1$

Δ je vždy integrabilní, $[a, a] = 0$, a generuje Δ



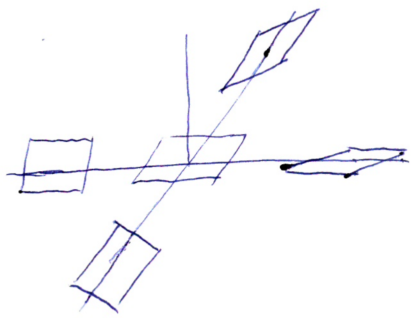
* vždy lze najít integrální křivky k zadanému vektorovému poli a (tj. orbity generátorem a)

* musíme mít $m > 2$ a $n > 1$ aby bylo něco netriviálního

Př: $m = 3$ $n = 2$

M souř. x, y, z

* kodistribuce Δ^* daná jedinou formou



$$\Delta^* \qquad \alpha = -y\,dx + x\,dy + dz = \varrho^2 d\varphi + dz$$

* v cylin. souř.

Δ kompl. k Δ^*

$$0 = \alpha \cdot a = -y a^x + x a^y + a^z$$

$\Rightarrow$ * 2 generátory, např:

$$a_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}$$

$$a_2 = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}$$

* alternativně:

$$0 = \alpha \cdot a = \varrho^2 a^\varphi + a^z$$

$$\bar{a}_1 = \frac{\partial}{\partial \varrho}$$

$$\bar{a}_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2\varrho \frac{\partial}{\partial z}$$

neinvol.: $[a_1, a_2] = 2 \frac{\partial}{\partial z} \notin \Delta$ $\qquad [\bar{a}_1, \bar{a}_2] = -2\varrho \frac{\partial}{\partial z} \notin \Delta$

$d\alpha = 2 dx \wedge dy$ $\qquad d\alpha = 2\varrho \, d\varrho \wedge d\varphi$

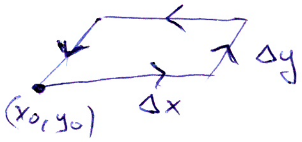
nedif.: $a_1 \cdot d\alpha \cdot a_2 = 2 \neq 0$ $\qquad \bar{a}_1 \cdot d\alpha \cdot \bar{a}_2 = 2\varrho \neq 0$

$\Rightarrow$ není integrabilní

* lze nahlédnout:
(plocha lze parametrizovat pomocí x, y pže Δ neobsahuje $\frac{\partial}{\partial z}$)
aby bylo integrab. tak by integrální křivka, která tvoří smyčku v x-y (jejíž projekce) musela být smyčkou

1) $\rho = \rho_0$, $\varphi = \varphi$ $\Rightarrow$ $z = -\rho_0^2 \varphi$ není smyčka
* int. křivka $\frac{\partial}{\partial \varphi} - \rho^2 \frac{\partial}{\partial z}$

2) $x \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, $y \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ * aby byla (malá) integ. křivka



$z_0 \to z_0 + y_0 \Delta x - (x_0 + \Delta x)\Delta y - (y_0 + \Delta y)\Delta x + x_0 \Delta y$
$= z_0 - 2\Delta x \Delta y$ není smyčka

POZN: spec. případ $n = m-1$

Δ gen. a_i $i = 1 \dots n-1$
Δ^* gen. α * pouze jeden kovektor $\forall_j \; a_j \cdot \alpha = 0$

invol: $[a_i, a_{i'}] = f_{i i'}^{\,j} a_j$

dif: $d\alpha = \Theta \wedge \alpha$

integrab.: $\exists x : \forall_j \; a_j \cdot dx = 0$

tzn. $\exists x, \beta : \alpha = \beta \, dx$ * dx gen. $\Delta^* \Rightarrow$ úměrné α

tzn. $\exists \beta : d\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$ * využití Poincarého lemmatu, předpoklad kontrahovatelnosti (lokální)
* jednoduchá podmínka (nezávislá na Frob. v.)

Homog. systém parc. dif. rovnic

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^p (X^j) \frac{\partial X^i}{\partial y^k} = 0 \qquad i = 1, \dots, m$$
$$k = 1, \dots, n$$
$$X^i = X^i(y^1, \dots, y^n) \qquad p = n+1, \dots, m$$

pro které α_i^p existuje řešení X^i?
* jaké podmínky musí α_i^p splňovat aby byla zajištěna existence řešení?
* problém lze přeinterpretovat geometricky

M dim $M = m$ souř. x^j $j = 1, \dots, m$

N dim $N = n$ souř. y^k $k = 1, \dots, n$

$\iota : N \hookrightarrow M$

* vezměme vnoření ι jehož souř. vyjádření je dáno fcemi X^i

$X = x \circ \iota \circ y^{-1}$ * definuje podvarietu N

Δ^* gen. α^p, $p = n+1, \dots, m$, která je normálová k N (* N je integr.)

$$\alpha^p \cdot \underbrace{\iota_* \frac{\partial}{\partial y^k}}_{\sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^i}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^m \alpha^p_i (X^j) \frac{\partial X^i}{\partial y^k} = 0$$

* naše rovnice

* požadavek, že α^p_i jsou komponenty gen. Δ^*, která je normálová k podvarietě N zadané řešeními X^i odpovídá existenci řešení

* z Frobeniovy věty lze integrabilitu charakterizovat podmínkami na α^p

$$d\alpha^p|_\Delta = 0 \qquad \text{neboli } \exists \Theta^p_q : \; d\alpha^p = \sum_{q=n+1}^m \Theta^p_q \wedge \alpha^q$$

* v souř:

$$\exists \Theta^p_{qi} : \quad \alpha^p_{[i,j]} = \sum_{q=n+1}^m \Theta^p_{q[i} \alpha^q_{j]}$$

podmínky integrability (naší rovnice)

* toto jsou podmínky na α^p_i zajišťující existenci řešení X^i

spec. případ: $n = m-1$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (X^j) \frac{\partial X^i}{\partial y^k} = 0$$

* komp. jednoho kovektoru α

podmínka $\exists \Theta : \; d\alpha = \Theta \wedge \alpha$ * Frob. věta

$\exists x, \beta : \; \alpha = \beta \, dx$

$\exists \beta : \; d\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$

* Poincaré lemma

* zpět k Frob. větě

důk: "$\Leftarrow$"

Δ involutní * chceme ukázat, že $\exists\, x^p$, $p=n+1,\dots,m$, dx^p gen. Δ^*

indukce přes n:

$\underline{n=1}$: nechť a_1 gen. Δ $\Rightarrow$ lze zvolit x^k, $k=1,\dots,m$ tak, že

$$a_1[x^1]=1\ ,\quad a_1[x^p]=0\ ,\ p=2,\dots,m$$

* parametr toku generovaného a_1

* konstantní podél int. křivek a_1

$\underline{n-1\to n}$: nechť a_j, $j=1,\dots,n$, gen. Δ, invol: $[a_i,a_{i'}]=f_{ii'}{}^j a_j$, $i,i'=1,\dots,n$

$\Rightarrow$ lze zvolit x^1 tak, že $a_1[x^1]=1$

definujme $\bar a_j = a_j - a_j[x^1]\,a_1$ $\quad j=2,\dots,n\,,\quad \bar a_1 = a_1$

$\Rightarrow$ 1) $\bar a_j[x^1]=0$ tzn. $\bar a_j$ jsou tečné k $x^1=\text{konst}$

2) $\bar a_1,\dots,\bar a_n$ gen. Δ

3) $[\bar a_i,\bar a_{i'}]=\sum\limits_{j=2}^{n}\bar f_{ii'}{}^j\,\bar a_j$ $\quad i,i'=2,\dots,n$ $\quad$ pže $[\bar a_i,\bar a_{i'}][x^1]=\bar a_i[\overbrace{\bar a_{i'}[x^1]}^{=0}]-i\leftrightarrow i'=0$

* tzn $[\bar a_i,\bar a_{i'}]$ je tečné k x^1

4) $[\bar a_1,\bar a_i]=\sum\limits_{j=2}^{n} f_{1i}{}^j\,\bar a_j$ $\quad$ pže $[\bar a_1,\bar a_i]=[a_1,a_i-a_i[x^1]a_1]$

$$=[a_1,a_i]-a_1[a_i[x^1]]\,a_1$$

* přidaný člen $\underbrace{a_i[\underbrace{a_1[x^1]}_{1}]a_1}_{0}$

$$=[a_1,a_i]-\big(a_1[a_i[x^1]]-a_i[a_1[x^1]]\big)a_1$$

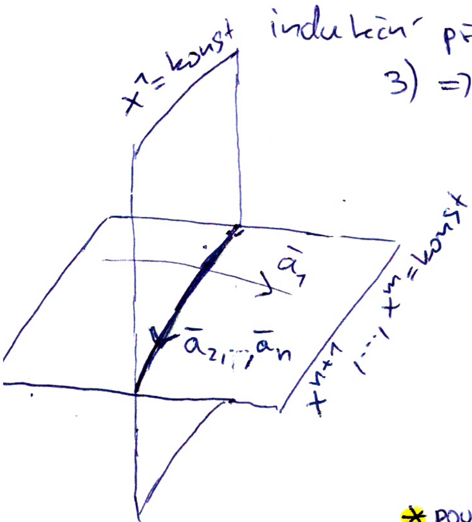
$$=[a_1,a_i]-[a_1,a_i][x_1]\,a_1$$

* invol. a_j

$$\overset{*}{=}\sum_{j=1}^{n} f_{1i}{}^j\big(a_j-a_j[x^1]a_1\big)=\sum_{j=2}^{n} f_{1i}{}^j\,\bar a_j$$

* člen $j=1$ vypadl

indukční předpoklad:



3) $\Rightarrow$ $\exists\, x^p$, $p=n+1,\dots,m$ tak, že dx^p gen. kodistr, která je kompl. k distr. gen. $\bar a_j$, $j=2,\dots,n$ v rámci $(n-1)$-dim. podvariety $x^1=\text{konst}$

rozšíříme x^p, $p=n+1,\dots,m$, z $x^1=\text{konst.}$ pomocí toku gen. $\bar a_1$

požadavkem $\bar a_1[x^p]=0$, $p=n+1,\dots,m$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}_{\bar a_1}(\bar a_i[x^p]) = \bar a_1[\bar a_i[x^p]] \overset{*}{=} [\bar a_1,\bar a_i][x^p]+\bar a_i[\underbrace{\bar a_1[x^p]}_{=0}]$$

* def. Lie. z.

* použijeme 4)

$$\overset{*}{=} \sum_{j=2}^{n} f_{1i}{}^j\,\underbrace{\bar a_j[x^p]}_{=0\ \text{na}\ x^1=\text{konst}}$$

$\Longrightarrow$ $\bar a_i[x^p]=0$ všude

* $\mathcal{L}_{\bar a_1}\gamma_i=\sum\limits_{j=2}^{n} f_{1i}{}^j\gamma_j$ je lin. dif. rce s poč. podm. $\gamma_i=0$

$\Rightarrow$ $\bar a_i\cdot dx^p=0$, $i=1,\dots,n$, $p=n+1,\dots,m$ tzn dx^p generují Δ^*

* $x^p=\text{konst}$ jsou int. podv. distr. Δ,Δ^*

INTERPRETACE LIEOVY ZÁVORKY

Věta: Φ_α, Ψ_β toky s gen. $a, b \in TM$

$$\Phi_\alpha \Psi_\beta = \Psi_\beta \Phi_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad [a,b] = 0$$

důk. "⇒"

$$\Xi(\alpha,\beta) = \Phi_\alpha \Psi_\beta = \Psi_\beta \Phi_\alpha$$

$\Xi(\alpha,\beta)x$ je 2-dim. podv. N_x variety M

↑ ↑ souř. na N_x

$y = \Xi(\alpha,\beta)x \qquad a|_y = \frac{D}{d\varepsilon} \Phi_\varepsilon y \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{D}{d\varepsilon} \Xi(\alpha+\varepsilon,\beta)x \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_y$

$$[a,b] = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right] = 0$$

důk "⇐"

$\Phi_{\alpha*} = \exp(-\alpha \mathcal{L}_a) \qquad \Phi_{\beta*} = \exp(-\beta \mathcal{L}_b)$

$[a,b] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b] = \mathcal{L}_{[a,b]} = 0$

$\Rightarrow [\Phi_{\alpha*}, \Psi_{\beta*}] = [\exp(-\alpha\mathcal{L}_a), \exp(-\beta\mathcal{L}_b)] = 0$

$\Rightarrow \Phi_\alpha \Psi_\beta = \Psi_\beta \Phi_\alpha$

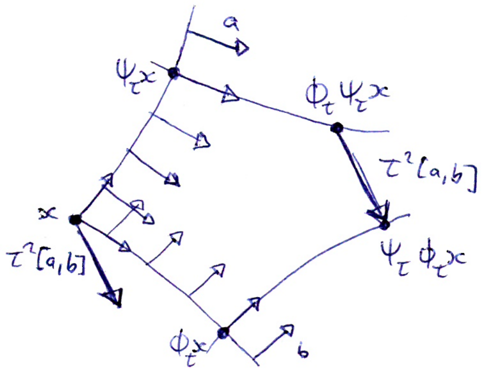
* Lieova závorka $[a,b]$ = nekomutativita toků gen. a, b

  $\Phi_\tau \Psi_\tau x \neq \Psi_\tau \Phi_\tau x$

* rozdíl bodů není definován, ale rozdíl funkčních hodnot libovolné fce je a odpovídá právě $[a,b][f]$

Věta: Φ_α, Ψ_β toky s gen. $a, b \in TM$

$$[\Phi^*_\tau, \Psi^*_\tau] f = \tau^2 [a,b] \cdot df + O(\tau^3)$$



důk.:

* spočítejme levou stranu v bodě x

$$(\Phi^*_\tau \Psi^*_\tau - \Psi^*_\tau \Phi^*_\tau) f \big|_x = f(\Psi_\tau \Phi_\tau x) - f(\Phi_\tau \Psi_\tau x)$$

označme $\varphi(\alpha,\beta) = f(\Phi_\alpha \Psi_\beta x)$, $\psi(\alpha,\beta) = f(\Psi_\beta \Phi_\alpha x)$, $\qquad \varphi, \psi \xrightarrow[\alpha,\beta \to 0]{} f(x)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\beta) = \frac{\partial}{\partial\alpha} f(\Phi_\alpha \Psi_\beta x) = \frac{D}{d\varepsilon} \Phi_{\alpha+\varepsilon} \Psi_\beta x \Big|_{\varepsilon=0} [f] = a[f]\big|_{\Phi_\alpha \Psi_\beta x} \longrightarrow a[f]\big|_x$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}(\alpha,\beta) = \frac{\partial}{\partial\beta} f(\Phi_\alpha \Psi_\beta x) = \frac{D}{d\varepsilon} \Phi_\alpha \Psi_{\beta+\varepsilon} x \Big|_{\varepsilon=0} [f] = \Phi_{\alpha*} \frac{D}{d\varepsilon} \Psi_{\beta+\varepsilon} x \Big|_{\varepsilon=0} [f]$$

$$= \Phi_{\alpha*}(b|_{\Psi_\beta x})[f] = \Phi_{\alpha*}(b|_{\Phi_\alpha^{-1}\Phi_\alpha \Psi_\beta x})[f] = (\Phi_{\alpha*} b)[f]\big|_{\Phi_\alpha \Psi_\beta x} \longrightarrow b[f]\big|_x$$

* podobně

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \to b[f]\big|_x \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\beta} \to a[f]\big|_x$$

* podobně vyšší derivace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} \to a[a[f]]|_x \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} \to b[b[f]]|_x$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} \to b[a[f]]|_x \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} \to a[b[f]]|_x$$

$$f(\Psi_\tau\Phi_\tau x) - f(\Phi_\tau\Psi_\tau x) = \psi(\tau,\tau) - \varphi(\tau,\tau) = \cancel{\psi - \varphi}\Big|_{(0,0)} + \cancel{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)}\Big|_{(0,0)}\tau$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} - \cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\Big|_{(0,0)}\tau^2 + O(\tau^3)$$

$$= \tau^2\left(a[b[f]] - b[a[f]]\right)\Big|_x = \tau^2 [a,b][f]\Big|_x + O(\tau^3)$$

* Lie. z. charakterizuje "neuzavírání" orbit vekt. polí
* $[a,b] \neq 0 \Rightarrow$ a, b nemohou být souř. vekt. pole
* $[a_i, a_{i'}] = \sum_{j=1}^{n} f^{j}_{ii'} a_j$ involutivnost $\Rightarrow$ integrabilita

pokud navíc $f^{j}_{ii'} = 0$, tak $\exists$ souř. $a_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ na podvarietě

(tj. zobecnění podmínek holonomnosti báze)

PR SELF-DUÁLNÍ ELMAG. POLE

Maxwell. rce:

$$dF = 0 \qquad d{*}F = {*}J$$

* odpovídá:

$$\nabla_{[\underline{a}} F_{\underline{bc}]} = 0 \qquad \nabla_{\underline{n}} F^{\underline{an}} = J^{\underline{a}}$$

* pro $d=4$ a $\operatorname{sign} g = -1$ je Hodge komplexní jednotka

$$*: \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$$

$$** = -\mathrm{id}$$

$(*\alpha)\bullet(*\beta) = -\alpha\bullet\beta$ * je konzistentní se skalárním souč.

$\Rightarrow$ má vlastní čísla $\pm i$ v komplexifikaci $\Lambda^2 M$

$*\hat{F} = -i\hat{F}$ self-duální * vlastní fce Hodge s vl. č. $\pm i$

$*\hat{F} = +i\hat{F}$ anti-self-duální

* reálné F lze rozložit na self-duální a anti-self-duální část

$$F = \tfrac{1}{2}(\hat{F} + \bar{\hat{F}}) = \operatorname{Re}\hat{F} \quad \text{kde} \quad \underset{\text{self-duální}}{\hat{F} = F + i{*}F} \qquad \underset{\text{anti-self-duální}}{\bar{\hat{F}} = F - i{*}F}$$

* podobně

$$*F = -\tfrac{i}{2}(\hat{F} - \bar{\hat{F}}) = \operatorname{Im}\hat{F}$$

* vakuové Maxwell. rce odpovídají uzavřenosti self-duálního elmag. pole

$$d\hat{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dF = 0 \quad \& \quad d{*}F = 0$$

tenzor energie-hybnosti:

$$T_{\underline{ab}} = \varepsilon_0 \left[F_{\underline{am}} F_{\underline{bn}} g^{\underline{mn}} - \tfrac{1}{2} \overset{F\bullet F}{F^2}\, g_{\underline{ab}} \right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \hat{F}_{\underline{am}} \bar{\hat{F}}_{\underline{bn}} g^{\underline{mn}}$$

* lze napsat pomocí $\hat{F}$ a $\bar{\hat{F}}$

důk:

$$\tfrac{1}{2}\hat{F}_{\underline{am}} \bar{\hat{F}}_{\underline{bn}} g^{\underline{mn}} = \tfrac{1}{2}(F_{\underline{am}} + i{*}F_{\underline{am}})(F_{\underline{bn}} - i{*}F_{\underline{bn}})\, g^{\underline{mn}}$$

* roznás. a rozpis Hodge

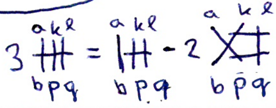
$$= \tfrac{1}{2}\left(F_{\underline{am}} F_{\underline{bn}} + \tfrac{1}{4} F^{\underline{kl}} F^{\underline{pq}} \varepsilon_{\underline{klam}} \varepsilon_{\underline{pqbn}}\right) g^{\underline{mn}} \quad \Big\}\ \text{reálné}$$

$$+ \tfrac{i}{4}\left(F^{\underline{kl}} \varepsilon_{\underline{klam}} F_{\underline{bn}} - F_{\underline{am}} F^{\underline{kl}} \varepsilon_{\underline{klbn}}\right) g^{\underline{mn}} \quad \Big\}\ \text{imaginární}$$

$$\varepsilon^{\underline{klam}} \varepsilon_{\underline{pqbm}} \underset{\uparrow}{=} -4!\, {}^{[4]}\delta^{\underline{klam}}_{\underline{pqbm}} \underset{\uparrow}{=} -3!\, {}^{[3]}\delta^{\underline{kla}}_{\underline{pqb}} = -2!\left(\delta^{\underline{a}}_{\underline{b}}\, {}^{[2]}\delta^{\underline{kl}}_{\underline{pq}} - 2\, \delta^{\underline{a}}_{[\underline{p}}\, \delta^{[\underline{k}}_{|\underline{b}|}\, \delta^{\underline{l}]}_{\underline{q}]}\right)$$

* minule   * papír

* bylo:



reálná část $= \frac{1}{2}\left[F_{an}F_{b}{}^{n} + \frac{1}{4}F_{kl}F^{pq}\left(-2\,g_{ab}\,{}^{[2]}\delta^{kl}_{pq} + 4\,g_{a[p}\,\delta^{[k}_{|b|}\delta^{l]}_{q]}\right)\right]$

* $\varepsilon\varepsilon\to\delta\delta$ $= \frac{1}{2}\left[F_{an}F_{b}{}^{n} - \frac{1}{2}g_{ab}F^{2} + F_{an}F_{b}{}^{n}\right] = \frac{1}{\varepsilon_0}T_{ab}$

imag. část $= \frac{i}{4}F^{kl}\left[\varepsilon_{klan}F_{b}{}^{n} - \varepsilon_{klbn}F_{a}{}^{n}\right] = \frac{i}{2}F^{kl}\varepsilon_{klrn}F_{s}{}^{n}\underbrace{\delta^{r}_{[a}\delta^{s}_{b]}}_{{}^{[2]}\delta^{rs}_{ab}}$

* vložím δ

$\varepsilon^{pqrs}\varepsilon_{pqab} = -4!\;{}^{[4]}\delta^{pqrs}_{pqab} = -4\;{}^{[2]}\delta^{rs}_{ab}$

* bylo * papír

* $\delta\delta\to\varepsilon\varepsilon$

$= -\frac{i}{8}F^{kl}\varepsilon_{klrn}F_{s}{}^{n}\varepsilon_{pqab}\varepsilon^{pqrs} = -\frac{i}{8}\varepsilon_{pqab}F^{kl}F_{s}{}^{n}\left(\varepsilon_{klrn}\varepsilon^{pqrs}\right)$

* $\varepsilon\varepsilon\to\delta\delta$

$= -\frac{i}{8}\varepsilon_{pqab}F^{kl}F_{s}{}^{n}\left(\cancel{-2\,\delta^{s}_{n}\,{}^{[2]}\delta^{pq}_{kl}} + 4\,\delta^{s}_{[k}\,\delta^{[p}_{|n|}\delta^{q]}_{l]}\right)$

* pže $\mathrm{Tr}F = 0$

$= -\frac{i}{2}\varepsilon_{pqab}\underbrace{F_{s}{}^{[p}F^{|s|q]}}_{=0} = 0$

PŘ MINK. $d=4$, DIVERGENCE

$g = -dt\,dt + dr\,dr + r^{2}(d\vartheta\,d\vartheta + \sin^{2}\vartheta\,d\varphi\,d\varphi)$

1) spočtěte ε a $\#\varepsilon$

$\varepsilon = r^{2}\sin\vartheta\;dt\wedge dr\wedge d\vartheta\wedge d\varphi$ * pže $|\det g_{ab}|^{\frac{1}{2}} = r^{2}\sin\vartheta$

$\#\varepsilon = -\frac{1}{r^{2}\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial t}\wedge\frac{\partial}{\partial r}\wedge\frac{\partial}{\partial\vartheta}\wedge\frac{\partial}{\partial\varphi}$

* pže $\varepsilon\bullet\#\varepsilon = \mathrm{sign}\,g = -1$

2) spočtěte $*d*F$ kde $F = dA$

$A = -f(r)\,dt$

$F = f'\,dt\wedge dr$ * pozn: $dF = 0$

$\#(*F) = F\bullet\#\varepsilon = -\frac{f'}{r^{2}\sin\vartheta}(dt\wedge dr)\bullet\left(\frac{\partial}{\partial t}\wedge\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\wedge\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cancelto{0}{\dots}\right)$

$= -\frac{f'}{r^{2}\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\wedge\frac{\partial}{\partial\varphi} \Rightarrow *F = -f'r^{2}\sin\vartheta\,d\vartheta\wedge d\varphi$

$d*F = -(r^{2}f')'\sin\vartheta\,dr\wedge d\vartheta\wedge d\varphi$

$\#(*d*F) = (d*F)\bullet\#\varepsilon = \frac{(r^{2}f')'}{r^{2}}(dr\wedge d\vartheta\wedge d\varphi)\bullet\left(-\frac{\partial}{\partial r}\wedge\frac{\partial}{\partial\vartheta}\wedge\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial t} + \cancelto{0}{\dots}\right)$

$= -\frac{(r^{2}f')'}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow *d*F = \frac{(r^{2}f')'}{r^{2}}dt$